

Modelación en Educación Matemática. Experiencias con futuros profesores



Modelación en Educación Matemática. Experiencias con futuros profesores



Jhony Alexander Villa-Ochoa

Paula Rendón-Mesa; Mónica Parra-Zapata; Juan Molina;
Jonathan Sánchez Cardona, María Camila Ocampo

Red Colombiana de modelación en Educación Matemática

Contenido

- El contexto de un Seminario en la formación de profesores
- La modelación Matemática ¿Qué es y no es? ¿Por qué y para qué?
- Modos de actuación en la modelación matemática.
- Ejemplos de algunas tareas
- Consideraciones finales

Muchas de las prácticas docentes intentan reflejar la manera en que los profesores aprendieron durante su formación.

La preocupación por la formación de profesores cobra mayor sentido cuando se considera que las prácticas de enseñanza de los profesores están bastante permeadas por las maneras en que ellos aprendieron de sus profesores durante su formación (Kennedy, 1999; Zaslavsky, 1995)

¿Qué experiencias debe vivir los estudiantes para profesor durante su formación?

Estos estudiantes aprenden de sus profesores mucho más que los contenidos prescritos

Algunas necesidades de formación

- Visiones compartimentalizadas de la actuación docente
- Creencias de los formadores de los profesores
- Amplias posibilidades de aprender matemáticas: “hacer matemáticas”
- Diversidad de Estrategias, de modos de actuación y potencialidades.
- Diversos usos de la modelación y las Tecnologías
- Desarrollo de proyectos
- Experiencias auténticas

Programa de formación de inicial de profesores

Saber Pedagógico

Currículo

Aspectos
Culturales

Evaluación

Etc.

Saber Disciplinar

Aritmética

Cálculo

Álgebra

Estadística...

Etc.

Saber Didáctico

Didáctica de la
Aritmética

Didáctica del Álgebra y
pensamiento variacional

Etc.

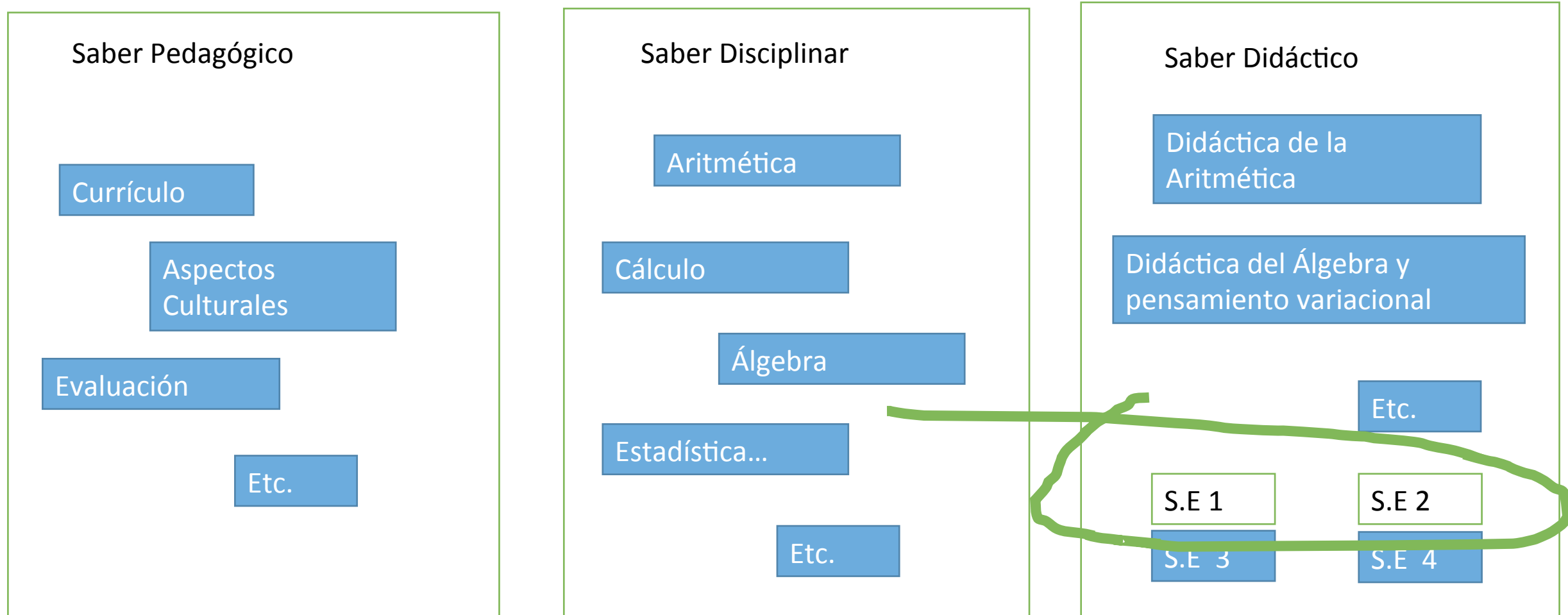
S.E 1

S.E 3

S.E 2

S.E 4

Programa de formación de inicial de profesores



¿Cuántos cursos de cada componente debe tener un programa de formación?

Cambio de cuestión

~~¿Cuántos cursos de cada componente debe tener un programa de formación?~~

¿Cómo *reconstituir* los espacios para que haya **más y mejores conexiones** entre los dominios?

Modelación en Educación Matemática.

Algunas generalidades

Modelación matemática

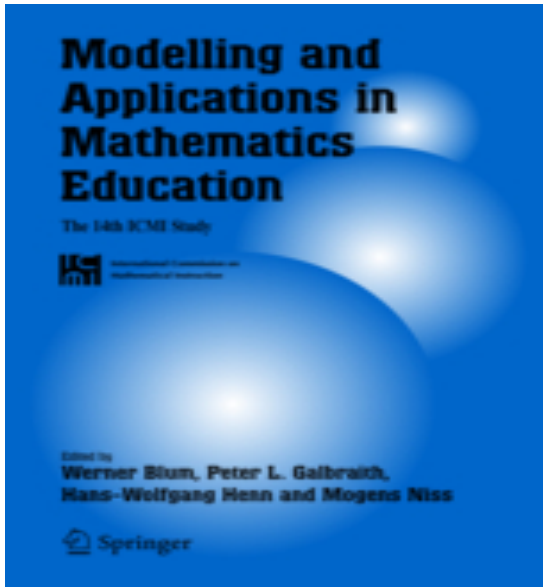
Puede considerarse como una manera de diseñar, abordar y pensar en **otro sistema, en este caso matemático**, los elementos que se hacen conscientes de **otro sistema**. Éste puede ser existente en el mundo o puede ser creado aunque no ocurra naturalmente.

Lesh & Caylor (2007)

¿Qué no es modelación matemática en Educación Matemática

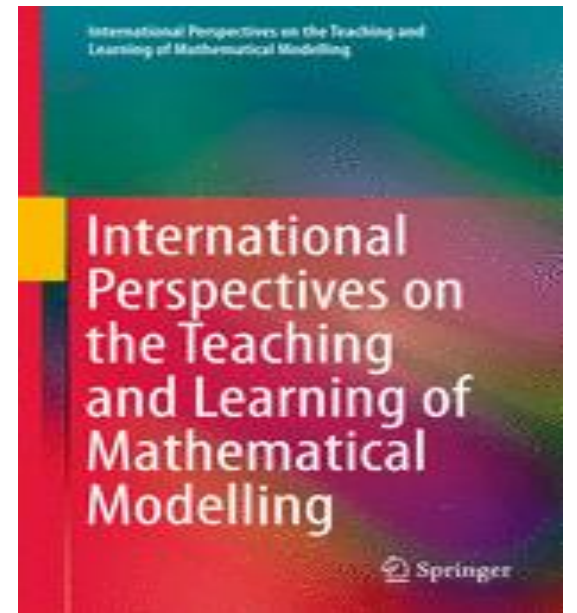
- Panacéa-receta
- Solo una construcción de una representación
- Solo un “acto cognitivo” de traducción entre sistemas.
- El seguimiento de un formato o recorrido de un ciclo

¿Qué dice la literatura internacional?

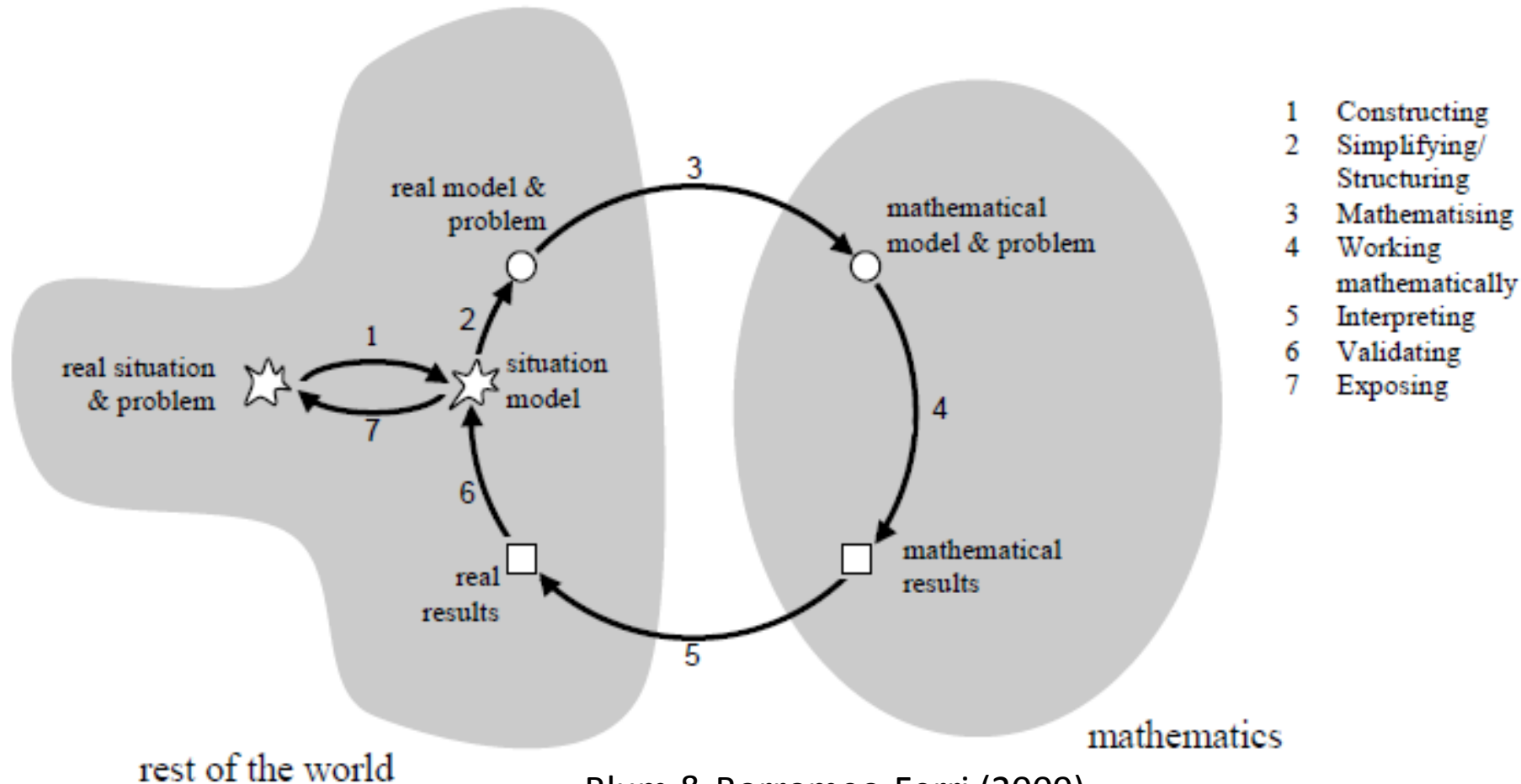


ICMI Study 14: Un estado acerca de la consolidación de la modelación a nivel internacional.

ICTMA: The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications



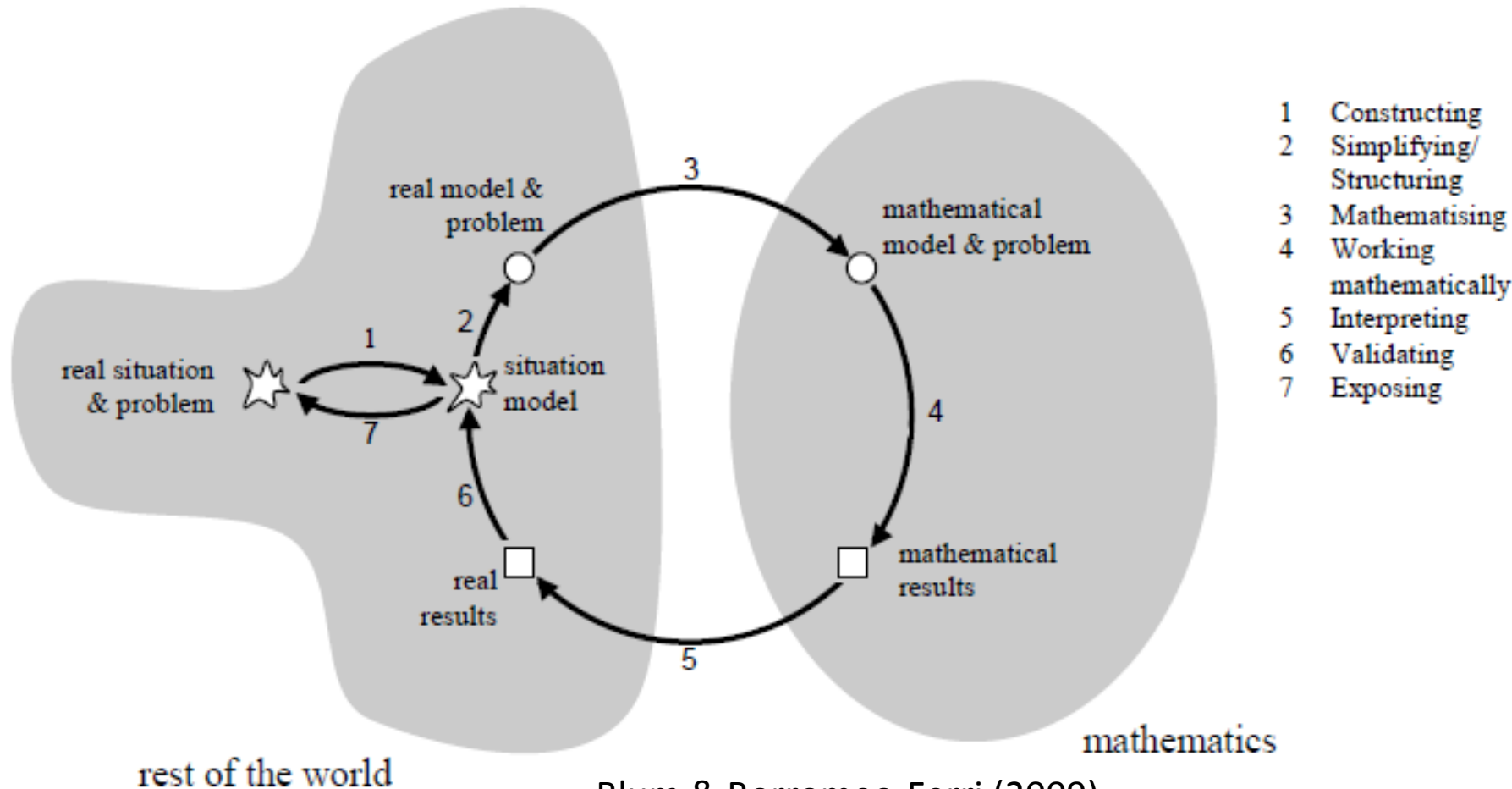
Una mirada como ciclo/Proceso



Blum & Borromeo-Ferri (2009)

Jhony Alexander Villa-Ochoa
jhony.villa@udea.edu.co

Una mirada como ciclo/Proceso



Blum & Borromeo-Ferri (2009)

Jhony Alexander Villa-Ochoa
jhony.villa@udea.edu.co

Algunos cuestionamientos

- ¿Qué dice esta representación sobre lo qué es la modelación matemática?
- ¿Es la modelación un conjunto de etapas que deben ser recorridas?

¿En dónde se observan en los ciclos:

- Los propósitos de formación?
 - Maneras de hacer modelación?
 - Subjetividad de los estudiantes y del profesor?
 - El rol del profesor?
 - El rol del estudiante?
- (Mesa, 2013)

¿Por qué la modelación matemática en el aula de clase?

1. foster among students general *creative* and *problem solving* attitudes, activities and competences.
2. generate, develop and qualify a *critical potential* in students towards the use (and misuse) of mathematics in extra-mathematical contexts.
3. prepare students to being able to *practice applications and modeling*—in other teaching subjects; as private individuals or as citizens, at present or in the future; or in their professions.

Niss (1989; quoted by Lingefjärd, 2006)

¿Por qué la modelación matemática en el aula?

4. establish a representative and balanced *picture of mathematics*, its character and role in the world. Such a picture must encompass all essential aspects of mathematics, and the application of mathematics and mathematical modeling in other areas *do* form one such aspect.
5. assist students' *acquisition and understanding of mathematical concepts, notions, methods, results and topics*, either to give a fuller body to them, or to provide motivation for the study of certain mathematical disciplines.

Niss (1989; quoted by Lingefjärd, 2006)

¿Cómo la modelación puede posibilitar todo esto?

¿Cómo desarrollarla en el aula de matemáticas?

¿Toda manera de hacer modelación en el aula de clase promueve tales aspectos en los estudiantes?

Kaiser (2014)

However, beyond this [the] consensus on the relevance of modelling, it is still disputed how to integrate mathematical modelling into the teaching and learning processes; various approaches are discussed and there is still a lack of strong empirical evidence on the effects of the integration of modelling examples into school practice.

¿Qué experiencias deberían tener los futuros profesores acerca de la modelación matemática?

Tareas de modelación: *Word Problems* o Problemas en enunciados verbales

Tradicionalmente, los *word problems* (problemas verbales) se han usado como vehículo típico para la introducción de problemas de modelación y aplicación en el aula de matemáticas. Incluso en para la resolución de problemas.
(Verschaffel et al. 2010)

Colombia, MEN (1998)

Ejemplo 1

“Una familia de cuatro (4) personas ha invitado a tres (3) amigos a comer a su casa. ¿Cuántos puestos se pondrán en la mesa?

Para resolver el problema los niños pueden crear un modelo como el siguiente:

$3 + 4 = ?$, en el que ya han abstraído aquellas partes del problema que son importantes para la solución del mismo. Se ha separado lo esencial de lo accesorio y se abstraen sólo rasgos matemáticos, que nos permiten utilizar un modelo con el cual ya estamos familiarizados. La respuesta a la búsqueda en el modelo matemático es 7.

Ahora, en el sentido inverso, nos devolvemos para validar el resultado, es decir para incorporar este resultado en el dominio físico para dar la respuesta al problema original, así la respuesta es: se deben colocar siete (7) puestos en la mesa.

Se parte de una situación para modelarla matemáticamente.

Algunos cuestionamientos sobre los *Word Problems*

- ¿Cuál sería su utilidad en el aula de clase?
- ¿Cuál es la visión de modelación que está presente en los enunciados verbales (*word problems*)?
- ¿Cuáles son las limitaciones de este tipo de “situaciones” en el aula de clase?

Se defiende el uso de *word problems* porque permite:

- la comprensión de los elementos clave en el enunciado/problema;
- la construcción de un “modelo matemático” de los elementos relevantes y las relaciones implicadas en el enunciado;
- trabajar a través del modelos matemáticos para derivar resultados matemáticos;
- Interpretar de los resultados que se desprende de una ejercicio de cálculo;
- evaluar si el resultado matemático es interpretado de manera adecuada y razonable;
- comunicar la solución obtenida de la problema original en el mundo real.

Verschafel et al. (2010)

Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling

Verschaffel et al. (2010)

Durante los últimos 20 años, muchos estudiosos han sostenido, en diversas formas, que la práctica (tradicional) de problemas de matemáticas en la escuela **no fomenta en los estudiantes, de hecho inhibe**, una disposición genuina hacia modelos matemáticos y hacia la solución de problemas.

Si bien los *Word Problems (WP)* parecen ajustarse a una comprensión de la modelación como construcción de una representación, o como una traducción entre dos dominios. Es necesario reconocer también que algunas prácticas de modelación a través de los WP se agotan en enunciados estereotipados que en ocasiones acarrearán cierta “pérdida de sentido” en los estudiantes.

Los WP pueden ajustarse a currículos con características rígidas.

Maneras de integrar la modelación matemática en aula

Otro tipo de enunciados verbales Auténticos que tienen en **cuenta la experiencia del estudiante**

La empresa de telefonía celular TIGO envió un mensaje de texto con la siguiente promoción: ***“Hoy habla 15 minutos a Tigo hasta las 11:59 PM Por solo \$1200. Envía TIGO al 2555”***

¿Cómo problematizar este enunciado?

Tareas de modelación: “Auténticas”

En un centro deportivo en las Filipinas, Florentino Anonuevo Jr. pule un par de zapatos. Los zapatos, según el Libro *Guinness Récorde*s, son el par más grande del mundo, con un ancho de 2,37 m y una altura de 5,29 m.

Aproximadamente, ¿qué tan alto sería un gigante que se ajustaría a estos zapatos? Explique su solución



Blum & Borromeo-Ferri (2009)

Algunos cuestionamientos sobre las tareas Auténticas

- ¿Cuál sería su utilidad en el aula de clase?
- ¿Cuál es la visión de modelación que está presente en las tareas auténticas?
- ¿Cuáles son las limitaciones de este tipo de “situaciones” en el aula de clase?

Algunos alcances y propósitos

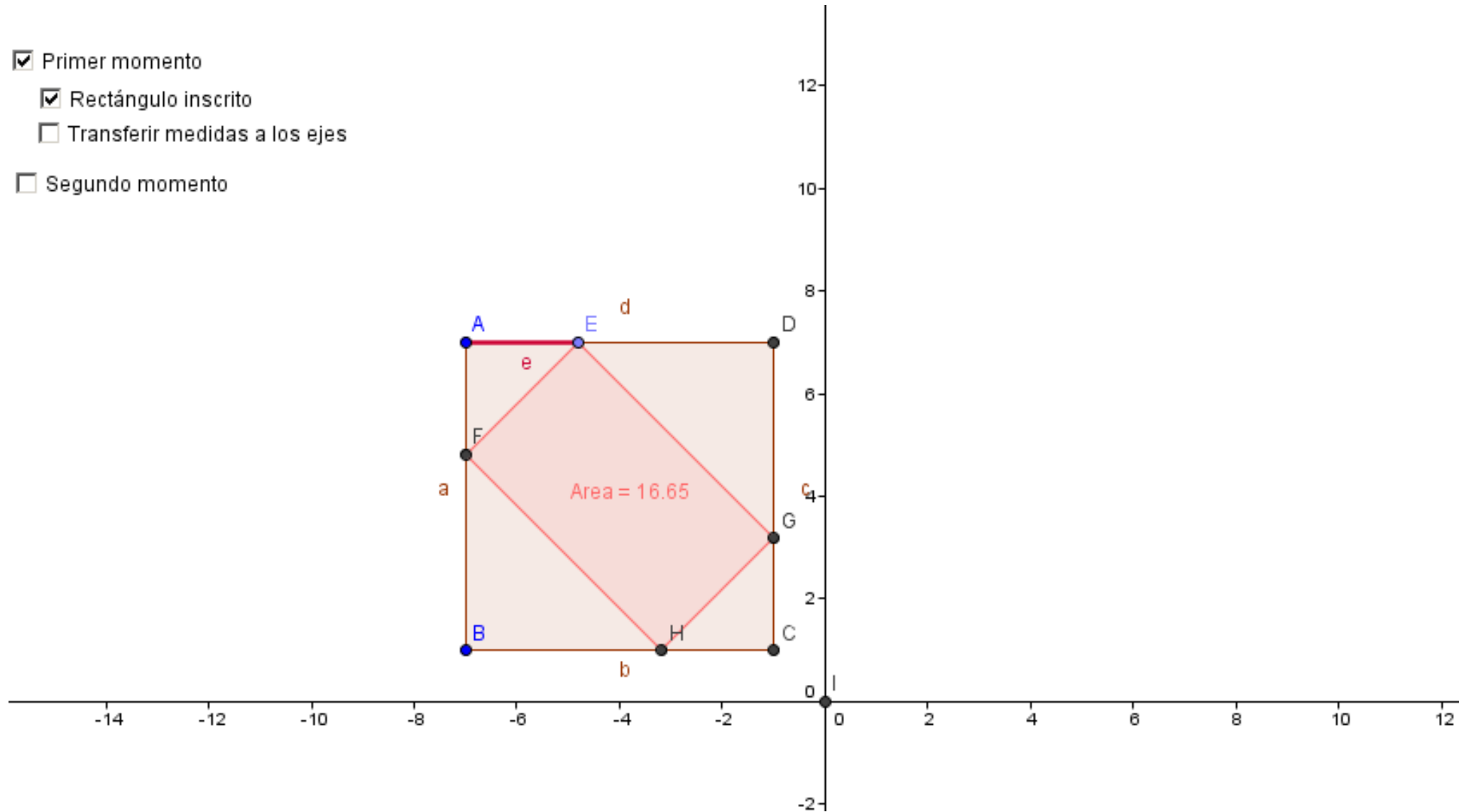
- Una visión de la “realidad” que trasciende la idea de situación “revestida” o estereotipada que, a veces, se presenta en los libros de texto.
- La atención, con frecuencia, está puesta en el desarrollo de habilidades y en el uso de la matemática para resolver asuntos clave en la situación.
- Por sus características puede ajustarse a currículos centrados en el desarrollo de competencias y contenidos.
- La visión de modelación presente está asociada recorrido del ciclo de la modelación.
- Pueden ser tareas “abiertas”

Modelación como construcción de presentaciones

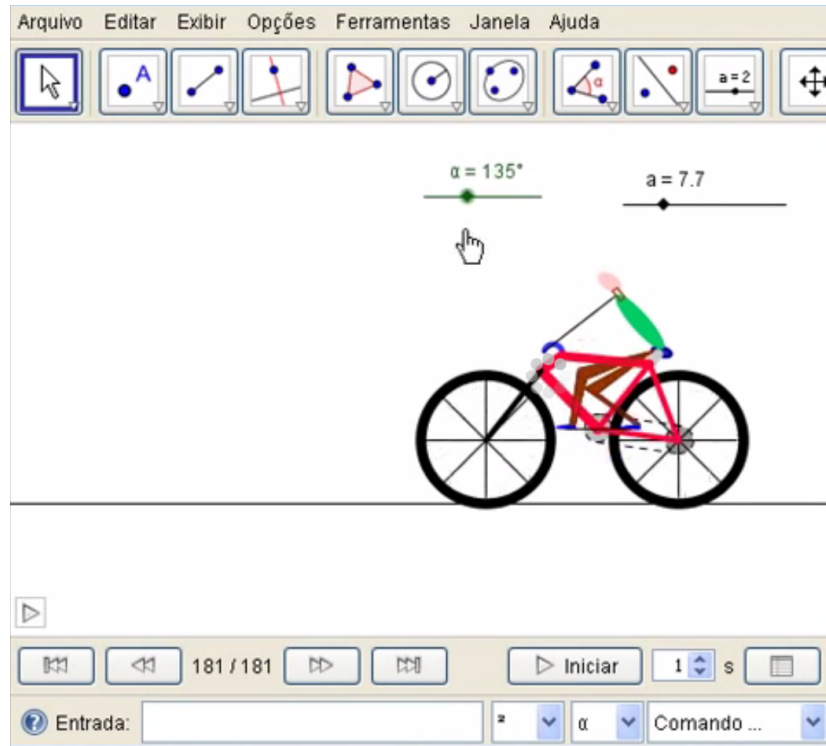
En lugar de discutir el vínculo entre dos prácticas aparentemente disímiles (prácticas escolares y el mundo profesional), sugerimos que se puede hacer mucho dentro de las matemáticas escolares con el fin de enriquecer la práctica actual de la modelación matemática con el fin de aprender el contenido matemático y herramientas útiles de una manera significativa, incluso cuando las prácticas profesionales "reales" aún no están plenamente incorporadas.

(Arcavi, 2008).

- ☒ Primer momento
 - ☒ Rectángulo inscrito
 - ☐ Transferir medidas a los ejes
- ☐ Segundo momento



Modelación como simulación de formas/fenómenos



<https://www.youtube.com/watch?v=JSrgM8Tnq74>



Meier, M. & Gravina, M. (2012).

Algunos cuestionamientos sobre las tareas de modelación a través de gráficas y simulación de formas/fenómenos.

- ¿Cuál sería su utilidad en el aula de clase?
- ¿Cuál es la visión de modelación que está presente en las “la construcción representaciones gráficas”?
- ¿Cuáles son las limitaciones de este tipo de “situaciones” en el aula de clase?

Algunos acercamientos

- La modelación se entiende como una traducción o un movimiento entre dos “mundos”. Del mundo del “problema” a otro mundo más familiar como por ejemplo el mundo de los símbolos [matemáticos] (Arcavi, 2008).
- Este tipo de tareas se enfocan principalmente en el desarrollo de estrategias de simbolización, y representación de algunos fenómenos [e.g. La variación]
- El noción de realidad/fenómeno/mundo extramatemática pierde interés, para rescatar la actividad matemática misma. ¿Modelación Intramatemática?
- El uso de software dinámico para recrear el comportamiento de un sistema se hace fundamental para la experimentación, formulación y validación de conjeturas.
- Las diferentes acciones que se observan en la modelación como un proceso pierden interés para centrarse principalmente en la “traducción” entre los dos “mundos”.

Modelación matemática y los proyectos

La modelación matemática se puede ver como una estrategia para que los estudiantes indaguen/investiguen por algunos fenómenos o situaciones de interés.

Modelación matemática y los proyectos

- **El tema es libre y por tanto el contenido matemático va emergiendo de la situación.**
(Borba y Villarreal, 2005; Villa-Ochoa y Berrío (2015))
- **El fenómeno a estudiar es sugerido con el ánimo de orientar el desarrollo de un contenido matemático específico.**
(Aravena, Caamaño, Giménez, 2008)



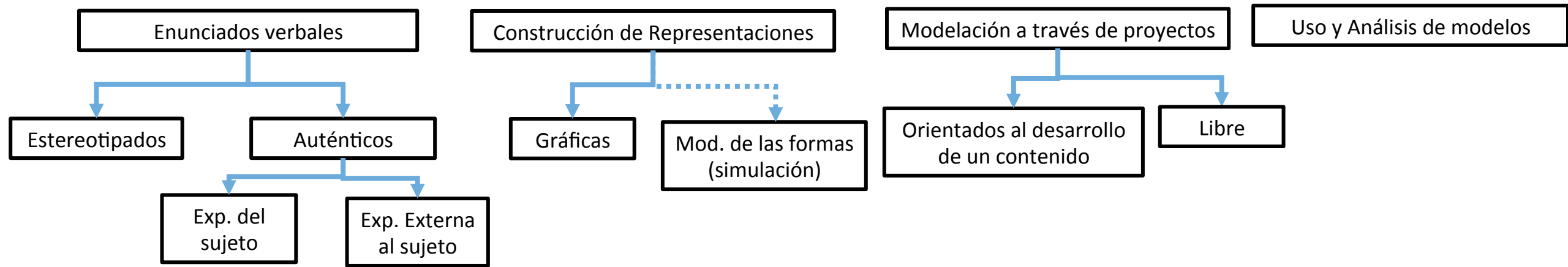
La modelación matemática: una experiencia familiar

Jonathan **Sánchez-Cardona**
Universidad de Antioquia
Colombia
jonathan.sanchezc@udea.edu.co
Angie Vanessa **Llano-Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
angie.llano@udea.edu.co
Luis Daniel **Osorio-Franco**
Universidad de Antioquia
Colombia
daniel.osoriof@udea.edu.co
Paula Andrea **Rendón-Mesa**
Universidad de Antioquia
Colombia
paula.rendon@udea.edu.co

Consumo de bolsas plásticas: una experiencia de modelación

Any Carolina **Cardona-Berrío**
Universidad de Antioquia
Colombia
any-0825@hotmail.com
Cindy Alejandra **Martínez-Castro**
Universidad de Antioquia
Colombia
cindymarca@hotmail.com
María Camila **Ocampo-Arenas**
Universidad de Antioquia
Colombia
macaocar08@gmail.com
Mónica Marcela **Parra-Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
monica.parra@udea.edu.co

Maneras de integrar la modelación matemática en aula



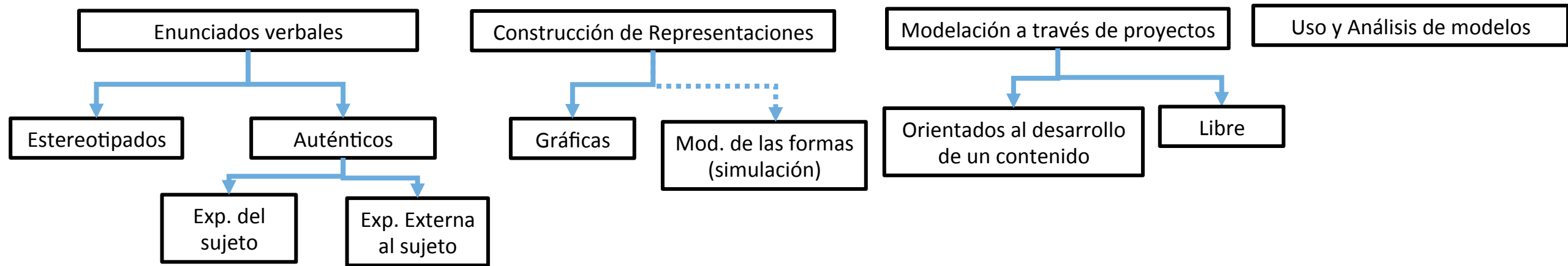
Relación o tipo de contexto ("Realidad")

Propósito formativo (Habilidades, competencias, Motivación, comprensión, ...)

Participación del profesor y de los estudiantes

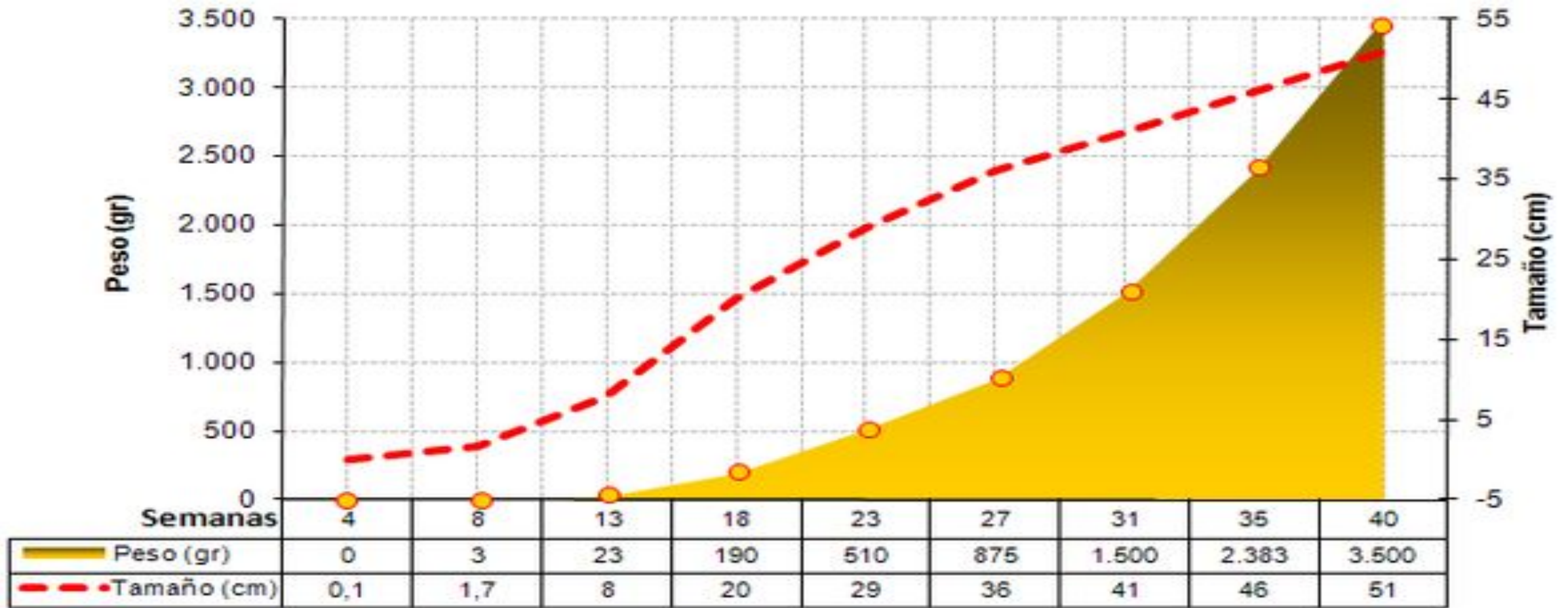
Alcances de la matemática en la situación (descriptivo, Prescriptivo, control, etc.)

Maneras de integrar la modelación matemática en aula



Otra manera de integrar la modelación. El uso análisis de modelos

Crecimiento fetal



Evolución semanas del peso y tamaño del feto. Tomado de
<http://www.papaenapuros.com/evolucion-del-peso-del-feto-en-el-embarazo/>

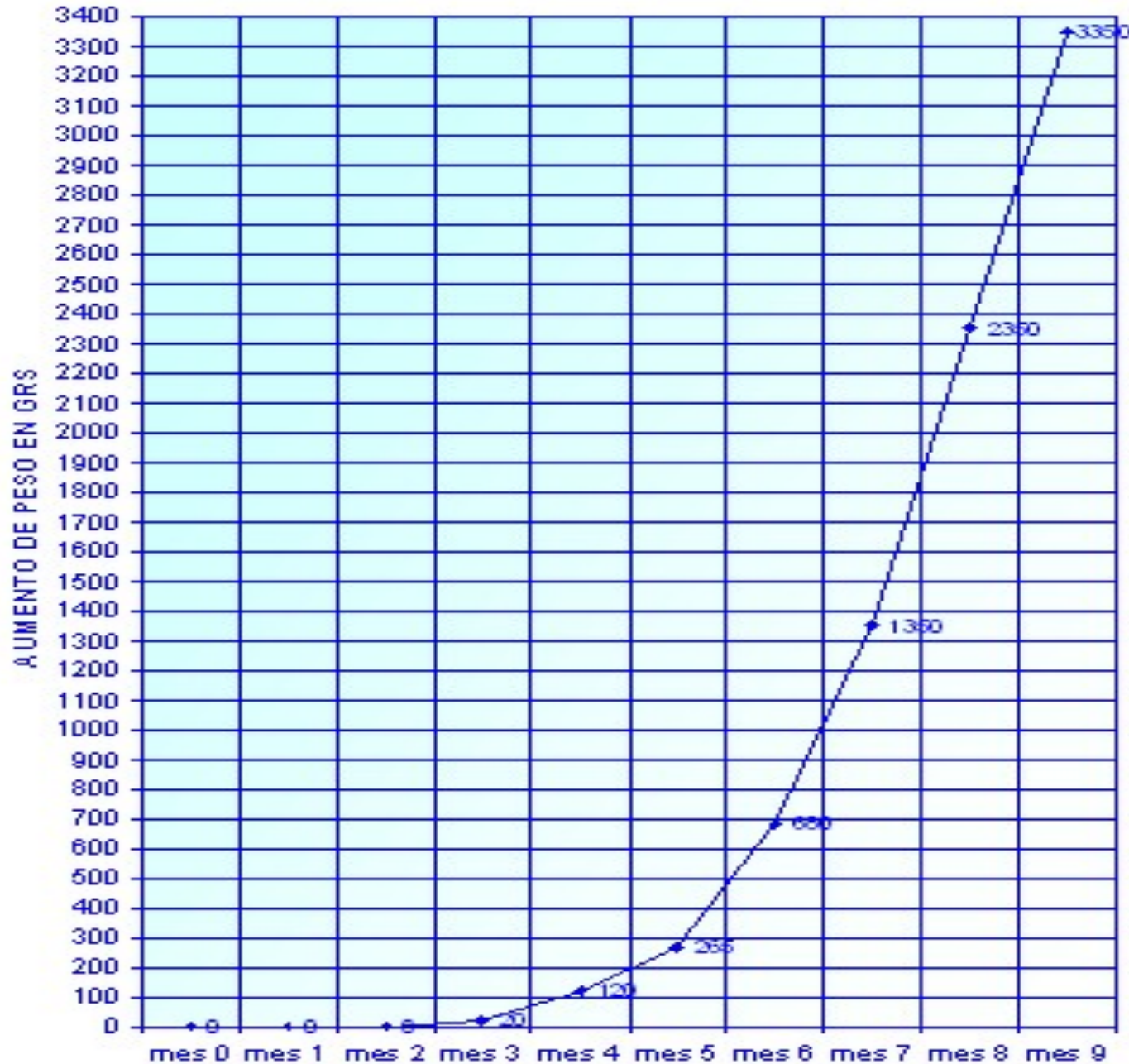
Crecimiento fetal

Semanas	Peso (gr)	Tamaño (cm)
4	0	0
5	0	0,1
6	0	0,3
7	0	1,1
8	0	1,7
9	0	2,4
10	5	3,4
11	10	4,3
12	16	5,7
13	23	8
14	43	14
15	70	15
16	100	16
17	140	18
18	190	20
19	240	22
20	300	25
21	360	26

Semanas	Peso (gr)	Tamaño (cm)
22	450	28
23	510	29
24	600	30
25	660	34
26	760	36
27	875	37
28	1.005	38
29	1.153	39
30	1.319	40
31	1.500	41
32	1.702	42
33	1.918	44
34	2.146	45
35	2.383	46
36	2.622	47
37	2.859	48
38	3.083	49
39	3.288	50
40	3.500	51

Tamaño y peso de un feto. Tomado de
<http://www.papaenapuros.com/evolucion-del-peso-del-feto-en-el-embarazo/>

AUMENTO DE PESO DE SU BEBE DURANTE EL EMBARAZO



Crecimiento fetal

Peso al final de cada mes del embarazo;

<http://www.portalesmedicos.com/publicaciones/articles/1177/6/>

Momento 1. ¿Qué es lo que modela el modelo?

Observar los gráficos y la tabla. ¿Qué dicen acerca del crecimiento fetal?

¿Cuáles preguntas pueden responderse a través del modelo? ¿Cuáles no?

Momento 2.

1. ¿Puede ver un “patrón” de crecimiento fetal durante el embarazo?
2. ¿Cuáles factores pueden influenciar o determinar el peso al nacer?
3. ¿Cómo cree que los matemáticos, biólogos, médicos han llegado a consolidar esos modelos matemáticos?

Momento 3. Los modelos en el aula

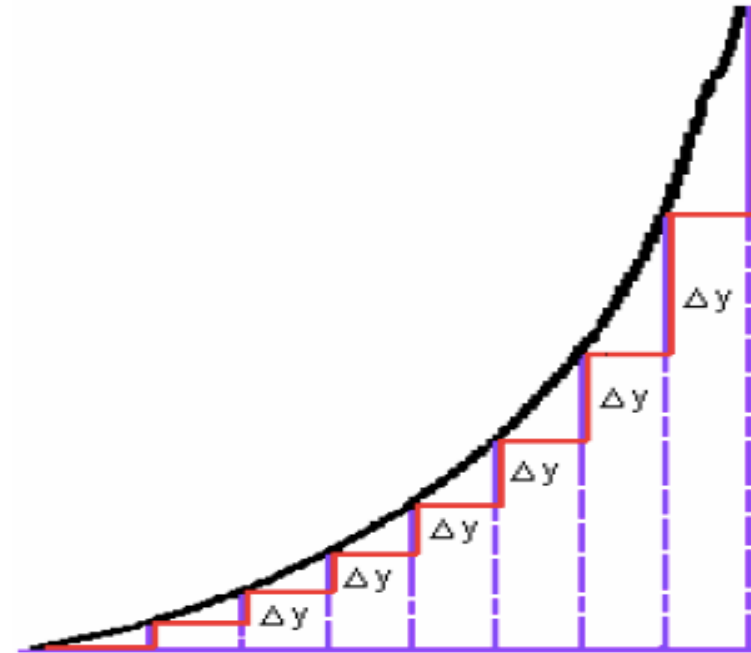
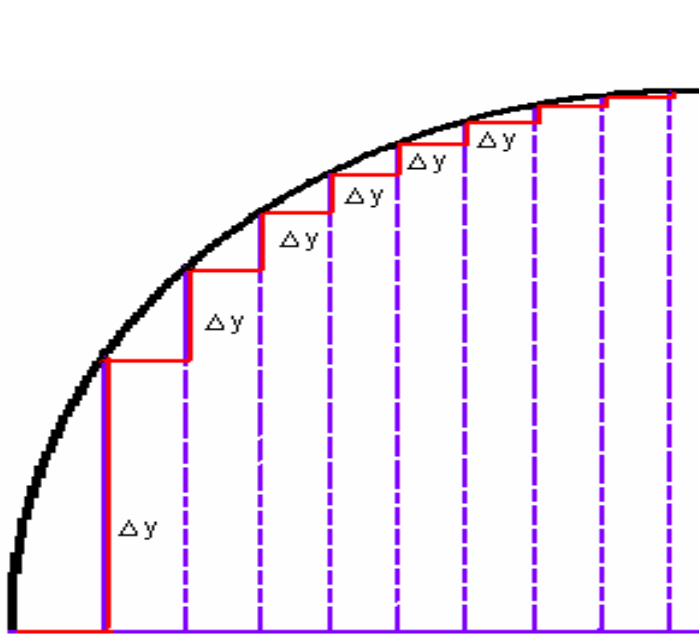
Modelos como el presentado en este seminario también puede ser usado como medios para desarrollar algunas acciones en la clase de matemáticas. Discuta con sus compañeros sobre la manera en que usted podría usarlo para preparar y desarrollar algunas secuencias de clase.

En el momento 1, los estudiantes hacen:

- Observar las magnitudes
- Comprender las “reglas” del gráfico
- Observar comportamientos (crecimientos y, no siempre, la tasa de variación)

Los estudiantes preguntan: ¿Cuál es el modelo? ¿Cuál es la ecuación?

Una aproximación al estudio de la variación



Posada & Villa-Ochoa (2006)

Análisis de la variación en una tabla

¿Corresponde el peso a un patrón cuadrático?

A handwritten table with three columns of data. The first column contains values from 4 to 10. The second column contains values from 0 to 3.4. The third column contains values from 0.1 to 1.0. Arrows indicate the differences between the first and second columns, and between the second and third columns.

4	— 0	
5	— 0.1	0.1
6	— 0.3	0.2
7	— 1.1	0.8
8	— 1.7	0.6
9	— 2.4	0.7
10	— 3.4	1.0

Con la información de las diferencias ¿Se podría saber si es cuadrático?

Una aproximación al estudio de la variación en funciones cuadráticas

x	y	Primera diferencia	Segunda diferencia
1	10	7	2
2	17	9	2
3	26	11	2
4	37	13	2
5	50	15	2
6	65	17	2
7	82	19	2
8	101	21	2
9	122	23	
10	145		

Villa-Ochoa (2008)

Algunas consideraciones en la formación de profesores

- ¿Qué es lo que subyace a todas esas maneras de hacer modelación?
- Proceso/ambiente de aprendizaje / competencia / estrategia/método de enseñanza.
- La modelación matemática al interior del aula no obedece a una comprensión homogénea.

- No todas las maneras de hacer modelación tienen los mismos propósitos educativos.
- Los alcances de la modelación matemática en el aula de clase no son absolutos, por el contrario, están en correspondencia con las maneras en que se desarrolle este proceso en el aula de clase.
- La modelación matemática involucra a los profesores y los estudiantes en dinámicas diferentes que dependen de los propósitos con los que se vea la modelación en el aula de clase.

En nuestros espacios de formación

- ¿Por qué debe o no implementarse procesos de modelación?
- Generar espacios (comunidades) en los cuales los profesores tengan **diversidad de experiencias de modelación**, pero que a la vez, puedan **reconocer las posibilidades y limitaciones** que esas formas ofrece y **planear estrategias para atender los desafíos** que tienes implementar cada una de ellas en el aula de clase.
- Trascender las denominaciones
- Reconocer estereotipos y promover estrategias para superarlos

Referencias

- Aravena, M.; Caamaño, C.; Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Relime*, 11(1), 49-92
- Arcavi, A (2008). Modelling with graphical representations. *For the learning Mathematics*. 28(2), 2-10
- Bonotto, C. (2007). How to replace word problem with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and application in Mathematics Educations. The 14th ICMI Study* (pp. 185-192). New York: Springer.
- D'Ambrósio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa*, 31(1), 99–120.
- Giere, R. N. (1999). Using Models to Represent Reality. In L. Magnani, N. J. Nersessian & P. Thagard (Eds.), *Model-Based Reasoning in Scientific Discovery* (pp. 41-57). New York: Springer US.
- Guerrero, G. (2010). La noción de modelo en el enfoque semántico de las teorías (The Notion of Model within the Semantic Approach of Theories). *Praxis Filosófica* (31), 169-185.
- Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. In S. Lerman (Ed). *Encyclopedia of Mathematics Education*. (pp.396-404). Dordrecht: Springer

Referencias

- Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *ZDM*, 38(2),96-112
- Meier, M. & Gravina, M. (2012). Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. *1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra*.
<http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/download/9583/7124>
- Verschaffel, L. D. ; De Corte, E. y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, 7 (4), 339-359.
- Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31 (1), 9-29.
- Villa-Ochoa, J. A., & Jaramillo, C. M. (2011). Sense of Reality through mathematical modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling – Proceedings of ICTMA14*. New York: Springer.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. *Revista Virtual-Universidad Católica del Norte* (27), 1-21.
- Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C. A., Berrio, M., Osorio, J. A., & Ocampo, D. A. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática. El caso de Alberto. *ALEXANDRIA. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 159–180.
- Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 8 (16), xx-xx. doi: 10.11144/Javeriana.M8-16.MMPE
- Villa-Ochoa, J. A. & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture. An Empirical Study. En Gloria A. Stillman, Werner Blum & Maria Sallet-Biembengut (eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences*, chapter 19. New York: Springer.

Muchas gracias por su atención
Jhony Alexander Villa-Ochoa
jhony.villa@udea.edu.co